1. Halle las trayectorias ortogonales de la familia $\Im$ de curvas $x^2+y^2=cx$. Dibuje ambas familias.

Solución: De la ecuación dada se obtiene $c=\dfrac{x^2+y^2}{x}$, si $x\neq 0$

Diferenciando la ecuación dada, tenemos: $2x+2yy^{'}-c=0$; $\quad y^{'}=\dfrac{c-2x}{2y}$

Tomando en cuenta el valor de c : $y^{'}=\dfrac{\frac{x^2+y^2}{x}-2x}{2y}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

o también: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$ (1)

Ésta es la ecuación diferencial para la familia dada $\Im$, para todo $xy\neq 0$. Por lo tanto, la ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales es: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ (2)

porque si $y=y_1(x)$ es ortogonal a $y=y_2(x)$, entonces $y_2^{'}=-\dfrac{1}{y_1^{'}}$

Resolviendo la ecuación (2): $(x^2-y^2)dy=2xydx$ es la ecuación diferencial exacta, porque $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)=\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy)$; $u(x,y)=c$; $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$

En nuestra ecuación: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2-y^2$

Entonces, $u=x^2y+\varphi(y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2+\varphi^{'}(y)=x^2-y^2$; $\varphi^{'}(y)=-y^2$; $\varphi(y)=-\dfrac{y^3}{3}+c_1$

Obtenemos: $u(x,y)=x^2y-\dfrac{y^3}{3}+c_1$.

Finalmente, las trayectorias ortogonales de la familia $\Im$ son: $x^2y-\dfrac{y^3}{3}=c$.

2. Halle la ecuación de las curvas tales que el segmento de la recta tangente en cada punto de la curva limitado por los ejes coordenados queda dividido en dos partes de la misma longitud por el punto de tangencia.

Solución:

3. Resuelva la ecuación diferencial $y^{'}(1+(y^{'})^2)=y^{'}$.

Solución:

4. Resuelva la ecuación diferencial $yy^{'}=-\frac{y^2}{x}+\frac{x-1}{2}$, con la condición inicial $y(1)=1$.

Solución:

5. Determine la solución de la ecuación diferencial $y^{'}-4y=2e^x\sqrt{y}$ que cumple la condición inicial $y(0)=2$.

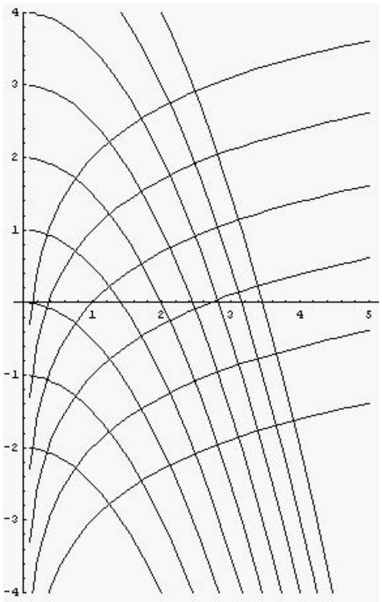
Solución:

6. Considere en el semiplano $x>0$, la familia de curvas $y=\ln(ax)(a>0)$. Determine la familia ortogonal, y dibuje ambas familias.

Solución: La familia dada es: $y=\ln x+\ln a$, $a>0$. Diferenciando la ecuación: $y^{'}=\dfrac{1}{x}$,

o también $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$, entonces la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$\dfrac{dy}{dx} = -x$. Integrando, tenemos: $y = -\dfrac{x^2}{2} + c$ es la familia ortogonal.

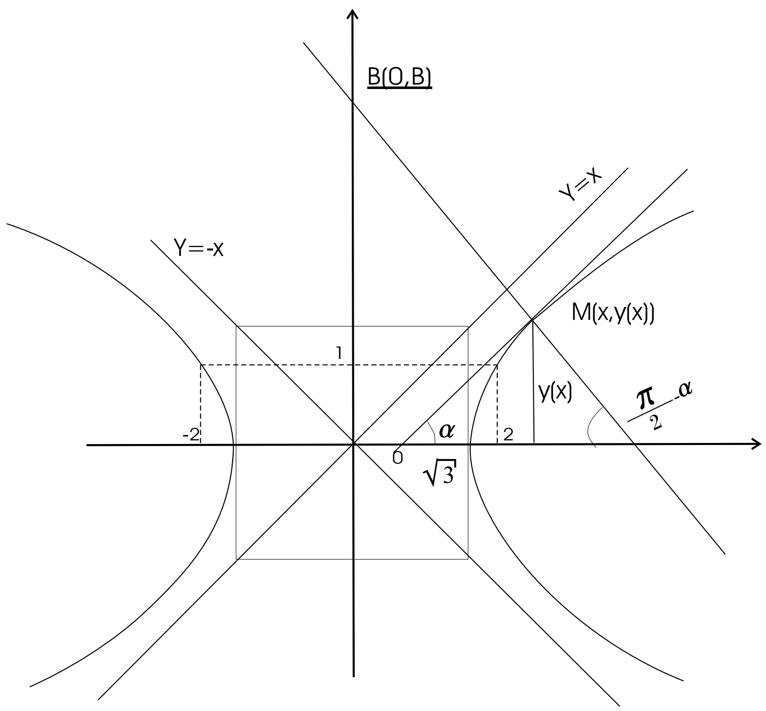


$y = \ln x + \ln a$

$y = -\frac{x^2}{2} + c$

7. Encuentre una función $y = y(x)$, cuyo gráfico pasa por el punto $(2,1)$, tal que en cada punto $(x, y(x))$ del gráfico recta normal al gráfico por ese punto corta la eje x en un punto de abscisa $2x$. Dibuje la curva resultante.

Solución:



Sea $y = y(x)$ -es la ecuación de la función buscada, y $M(x, y(x))$ es un punto arbitrario de esta función. Suponga que la ecuación de la normal a la curva $y = y(x)$, que pasa por el punto M, tiene forma $y = kx + b$.

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto M se determina: $y^{'}(x) = \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{k}$.
De donde $k = -\dfrac{1}{y'(x)}$.
El coeficiente (termino) $b = OB$,
del triángulo $\triangle\ AOB$: $b = OB = OA \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2x.\cot\alpha = \dfrac{2x}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2x}{y'}$.
Entonces, tenemos ecuación: $y(x) = -\dfrac{x}{y'(x)} + \dfrac{2x}{y'(x)}$
Finalmente, tenemos la ecuación diferencial para la función buscada $y(x)$:
$y^{'} \cdot y = x$ (1)
Integrando ésta ecuación: $\displaystyle\int y dy = \int x dx + c$.
$y^2 = x^2 + c$. Para hallar c utilizamos la condición: $y(2) = 1$.
Tenemos que $c = -3$, y entonces: $y^2 = x^2 - 3$. Esto es hipérbola.
$y = \sqrt{x^2 - 3}$. Esta es la función buscada.

8. Determine la solución de la ecuación diferencial

$$y^{'} = \frac{2x + y - 1}{x + 2y - 1}$$

que pasa por el punto $(0, 2)$.

Solución: Las rectas $2x+y-1 = 0$ y $x+2y-1 = 0$ no son paralelas; la transformación será $x = t+\dfrac{1}{3}$; $y = z+\dfrac{1}{3}$, donde $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ es el punto del corte (0 es solución del sistema)

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación dada,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{2t + \frac{2}{3} + z + \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + t + 2z + \frac{2}{3} - 1}, \quad \text{o sea ,} \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{2t + z}{t + 2z} \\
\text{haciendo la sustitución} \quad u &= \frac{z}{t}, \quad \text{o sea ,} \\
z &= ut, \text{ tendremos:} \\
\frac{du}{dt}t + u &= \frac{2 + u}{1 + 2u} \\
\frac{du}{dt}.t &= \frac{2 + u}{1 + 2u} - u \\
&= \frac{2 - 2u^2}{1 + 2u}
\end{aligned}$$

Separando las variables,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+2u)du}{2(1-u^2)} &= \int \frac{dt}{t} + c \\
\frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2udu}{1-u^2} &= \int \frac{dt}{t} + c \\
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-u^2\right| &= \ln|t| + c \\
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+z}{t-z}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| &= \ln|t| + c
\end{aligned}$$

Volviendo a las variables originales, obtenemos:

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+y-\frac{2}{3}}{x-y}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{(y-\frac{1}{3})^2}{(x-\frac{1}{3})^2}\right| = \ln\left|x-\frac{1}{3}\right| + c$$

Determinamos la solución que pasa por el punto $(0;2)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\frac{2}{3}}{-2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{\left(2-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}\right| &= \ln\left|-\frac{1}{3}\right| + c \\
\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 15 &= \ln\frac{1}{3} + c \\
c &= \frac{1}{4}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 15 - \ln\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Entonces, la solución particular que pasa por el punto $(0;2)$ es:

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+y-\frac{2}{3}}{x-y}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}\right| - \ln\left|x-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{4}\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 15 - \ln\frac{1}{3}.$$